ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. *Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I* // Тр. геом. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

2. Омельян О.М. *Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей* // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград, 2002. – №33. – С. 74 - 78.

3. Омельян О. М. *Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей* // Межд. конф. по геом. и анализу. – Пенза, 2003. – С. 63-69.

4. Омельян О. М. *Пучки связностей 1-го и 2-го типов, индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей* // Движения в обобщенных пространствах. – Пенза, 2005. – С. 94-101.

Е. А. Осипов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Evgenij.Osipov@ksu.ru

СУММАТОРНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассмотрена трехмерная задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов. Опираясь на результаты, полученные в работе [1 – 3], показано, как свести задачу к двум парам парных сумматорных уравнений и к паре интегральных уравнений с логарифмическими особенностями в ядрах.

1. Квазипериодические решения системы уравнений теории упругости в пространстве

Рассмотрим трехмерную задачу дифракции упругой волны в полупространстве, находящемся в контакте с жестким основанием. Пусть на плоскости Oxy расположена двоякопериодическая система дефектов, l_1 и l_2 — периоды системы дефектов по осям x и y соответственно. Из верхнего полупространства на границу раздела сред падает упругая волна $u^{(0)}$. Нужно найти волну u, отраженную вверх (см. рис. 1).

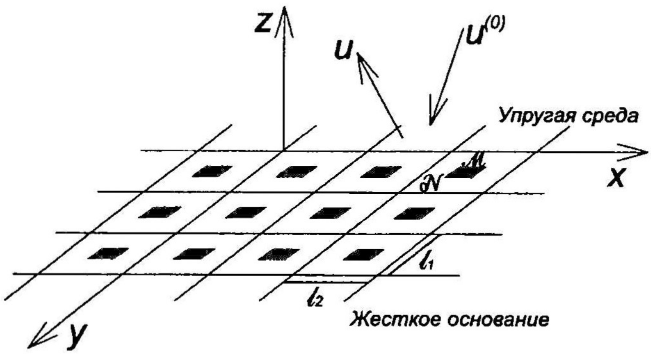

Рис. 1. Двоякопериодическая система дефектов

В трехмерной динамической теории упругости состояние упругой среды описывают вектор перемещений u и тензор напряжений σ. Будем считать, что зависимость по времени гармоническая и имеет вид $e^{i\omega t}$, где ω — круговая частота колебаний, ρ — плотность упругой среды, λ, μ — вещественные постоянные Ламе. Будем искать комплексные амплитуды напряжений и перемещений в виде волн Флоке. Подставим их в систему уравнений Ламе (см., например, [1]).

Найдем собственные значения и соответствующие им собственные вектора. Получим общее решение для амплитуд вида

$$v_{nm} = A_{nm}h_{1nm}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}h_{2nm}e^{-i\beta_{1nm}z} + C_{nm}h_{3nm}e^{i\beta_{2nm}z} + \\ + D_{nm}h_{4nm}e^{-i\beta_{2nm}z} + E_{nm}h_{5nm}e^{i\beta_{2nm}z} + H_{nm}h_{6nm}e^{-i\beta_{2nm}z}. \tag{1}$$

2. Условия на бесконечности

В работе [1] рассмотрены энергетические характеристики для периодических задач теории упругости как двумерного, так и трехмерного случаев.

Лемма. *Для упругих волн, двигающихся в направлении оси Oz в верхнее полупространство, постоянные $B_{nm} = 0$, $D_{nm} = 0$ и $H_{nm} = 0$. Для волн, уходящих в нижнее полупространство, $A_{nm} = 0$, $C_{nm} = 0$ и $E_{nm} = 0$.*

Падающую волну $u^{(0)}$, как и в случае задачи дифракции в полуплоскости [2], будем рассматривать в виде одной гармоники с номером n_0, m_0.

3. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов в полупространстве

Рассмотрим условия на границе сопряжения упругой среды с жестким основанием. Пусть на границе расположена периодическая система дефектов. В качестве границы раздела сред будем рассматривать плоскость $z = 0$.

Пусть упругое полупространство (или дефект) жестко прикреплено к твердому основанию, тогда на границе раздела сред должны выполняться условия

$$u_x^{(0)}(x,y,0) + u_x(x,y,0) = 0, \quad u_y^{(0)}(x,y,0) + u_y(x,y,0) = 0, \\ u_z^{(0)}(x,y,0) + u_z(x,y,0) = 0. \tag{2}$$

В случае, когда в области дефекта упругая среда скользит без трения вдоль границы (при этом отсутствует смещение вдоль оси z), условия примут вид

$$\sigma_{xz}^{(0)}(x,y,0)+\sigma_{xz}(x,y,0)=0,\quad \sigma_{yz}^{(0)}(x,y,0)+\sigma_{yz}(x,y,0)=0,$$
$$u_z^{(0)}(x,y,0)+u_z(x,y,0)=0. \tag{3}$$

Задача. Найти решение дифференциальных уравнений Ламе с граничными условиями (3) на $\mathcal{M}$ и (2) на $\mathcal{N}$.

Теорема 1. *Если на $\mathcal{N}$ выполнены условия* (2), *а на $\mathcal{M}$ — условия* (3), *то задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов в полупространстве эквивалентна системе из двух парных сумматорных функциональных уравнений*

$$\chi_1^0 e^{i\widetilde{L}_{1n_0}x}e^{i\widetilde{L}_{2m_0}y}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Upsilon_{nm}^{(1)}e^{i\widetilde{L}_{1n}x}e^{i\widetilde{L}_{2m}y}=0,\ (x,y)\in\mathcal{N},$$

$$\chi_2^0 e^{i\widetilde{L}_{1n_0}x}e^{i\widetilde{L}_{2m_0}y}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Upsilon_{nm}^{(2)}e^{i\widetilde{L}_{1n}x}e^{i\widetilde{L}_{2m}y}=0,\ (x,y)\in\mathcal{N},$$

$$\chi_3^0 e^{i\widetilde{L}_{1n_0}x}e^{i\widetilde{L}_{2m_0}y}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Upsilon_{nm}^{(3)}e^{i\widetilde{L}_{1n}x}e^{i\widetilde{L}_{2m}y}=0,\ (x,y)\in\mathcal{M},$$

$$\chi_4^0 e^{i\widetilde{L}_{1n_0}x}e^{i\widetilde{L}_{2m_0}y}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Upsilon_{nm}^{(4)}e^{i\widetilde{L}_{1n}x}e^{i\widetilde{L}_{2m}y}=0,\ (x,y)\in\mathcal{M}, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{L}_{1n}=\frac{2\pi n}{l_1},\quad \widetilde{L}_{2m}=\frac{2\pi m}{l_2}.$$

4. Переход к интегральным уравнениям

Теорема 2. *Если на $\mathcal{N}$ выполняются условия (2), на $\mathcal{M}$ — условия (3), то задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов в полупространстве сводится к интегральным уравнениям*

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} P_1(x,y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Upsilon}^{(1)}_{nm} e^{i\widetilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\widetilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi +$$
$$+ \iint\limits_{\mathcal{N}} P_2(x,y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Upsilon}^{(2)}_{nm} e^{i\widetilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\widetilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi =$$
$$= l_1 l_2 \Phi^{(1)}_{n_0 m_0}, \ (x,y) \in \mathcal{N},$$

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} P_1(x,y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Upsilon}^{(2)}_{nm} e^{i\widetilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\widetilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi +$$
$$+ \iint\limits_{\mathcal{N}} P_2(x,y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Upsilon}^{(1)}_{nm} e^{i\widetilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\widetilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi =$$
$$= l_1 l_2 \Phi^{(2)}_{n_0 m_0}, \ (x,y) \in \mathcal{N}. \quad (5)$$

Решения системы интегральных уравнений (5) должны быть доопределены до всей области $(0,l_1) \times (0,l_2)$ значениями $P_1(x,y) = 0$ и $P_2(x,y) = 0$ на $\mathcal{M}$. Тогда можно говорить, что задача дифракции эквивалентна паре интегральных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97009-р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипов Е. А. *Энергетические характеристики упругой волны для периодических задач теории упругости* // Сб. материалов Четвертой Всерос. науч.-инновац. школы. – Саров: Альфа, 2010. – С. 93-95.

2. Осипов Е. А., Плещинский Н. Б. *Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах* // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 9. – С. 76-82.

3. Плещинский Н. Б. *Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши* // Препринт ПМФ-04-01. – Казань: Казан. матем. об-во, 2004. – 34 с.

С. С. Оспичев

Новосибирский государственный университет,

ospichev@gmail.com

ВЫЧИСЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

В работе рассматриваются вычислимые нумерации семейств множеств из различных классов Σ_a^{-1} иерархии Ершова.

Пусть $a \in O$. Показано, что существует бесконечное семейство Σ_a^{-1}-множеств с единственной Σ_a^{-1}-вычислимой нумерацией. Также построено вычислимое семейство Σ_a^{-1}-множеств без Σ_a^{-1}-вычислимой фридберговой нумерации.